

关于“模糊数的最近的区间近似值”一文注释

李建新, 胡 刚

(1. 广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510090 2 广东工业大学 机电学院, 广东 广州 510090)

摘要: 本文讨论了 P. Grzegorzewski 在 Fuzzy Sets and Systems 杂志上提出的一个有关模糊数区间近似的方法, 用实例显示了, 这一方法存在着严重的错误.

关键词: 模糊数; 区间近似法; 清晰集

中图分类号: O159

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2007)01-0074-03

1 介绍

在模糊数的实际应用中, 为了简化计算的复杂性, 人们往往用一个区间 (清晰集) 来替代一个给定的模糊数. 这种做法被称为模糊数的区间近似 (或区间表示). 模糊数的区间近似已经得到了许多的应用. 在模糊数的探讨中, 借助于模糊数的区间表示, 人们可以应用来自于区间分析领域里的结果. 例如, 可以利用区间集的序关系来比较模糊数. 文献 [1-2] 中, α -割集 (α 固定) 的序关系就被利用来有序化模糊数集.

文献 [3] 给出了一个新的区间近似方法. 笔者称之为 d -方法. 本文将通过例子说明 d -方法存在着一些重大的缺陷. 在实际应用中, d -方法会导致严重失真.

2 准备工作

定义^[4] 一个 R 上的模糊集 A 其隶属函数为 $\mu_A(x)$ 被称为一个模糊数, 如果它具有下列性质:

- (1) A 是正规的, 即, 存在 $x_0 \in R$, 使得 $\mu_A(x_0) = 1$;
- (2) $\mu_A(x)$ 是模糊凸的, 即, $\forall x, y \in R, \forall \lambda \in [0, 1], \mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$;
- (3) $\mu_A(x)$ 是上半连续的;
- (4) $\{x \in R \mid \mu_A(x) > 0\}$ 是一个紧集.

对于任给的一个模糊数 A , 人们可以将它的隶属函数表达为

$$\mu_A(x) = \begin{cases} l(x), & x \in [a_1, a_2] \\ 1, & x \in [a_2, a_3] \\ r(x), & x \in (a_3, a_4] \\ 0, & \text{the others} \end{cases}$$

这里, a_1, a_2, a_3, a_4 为实数, $l(x)$ 是一个非减的函数, $r(x)$ 是一个非增的函数.

模糊数 A 的 α -割集是一个闭区间, 定义为

$$A_\alpha = \{x \in R : \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

其中

$$A_0 = \overline{\text{supp } A} = \overline{\{x \in R : \mu_A(x) > 0\}},$$

$$A_1 = \text{core } A = \{x \in R : \mu_A(x) = 1\}.$$

注释 1 最著名最流行的区间近似方法是利用

$$C_{0.5}(A) = A_{0.5} = \{x \in R : \mu_A(x) \geq 0.5\}$$

来替代模糊数 A . $C_{0.5}(A)$ 被称为 “The nearest ordinary set operator”^[1, 5], 它被广泛应用于模糊图像识别、模糊图像加工、模糊代数等领域^[6-8]. 为引用起见, 称这种方法为 α -方法.

设 $A_L(\alpha) = \inf\{x \in R : \mu_A(x) \geq \alpha\}$, $A_U(\alpha) = \sup\{x \in R : \mu_A(x) \geq \alpha\}$, 则有 $A_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)]$.

对任意的模糊数 A 和 B , 它们的 α -割集分别为 $[A_L(\alpha), A_U(\alpha)]$, $[B_L(\alpha), B_U(\alpha)]$, 定义 $d(A, B) =$

$$\sqrt{\int_0^1 (A_L(\alpha) - B_L(\alpha))^2 d\alpha + \int_0^1 (A_U(\alpha) - B_U(\alpha))^2 d\alpha}, \quad (1)$$

文献 [3] 中, (1) 被定义为 A 和 B 之间的距离.

利用度量 $d(A, B)$, 文献 [3] 提出了一个区间近似的新方法, 称之为 d -方法. d -方法就是用区间

$$C_d(A/\delta) = \left[\int_0^1 L(\alpha) d\alpha, \int_0^1 U(\alpha) d\alpha \right] \quad (2)$$

来替代 A/δ $C_d(A/\delta)$ 被文献 [3] 称为“模糊数 A/δ 的最近的区间近似”。

3 例子

模糊数的区间近似替代是利用区间 (清晰集) 来替代所关注的模糊数。由于替代物与被替代物在数学表达形式上的不同, 替代物不可避免地会在某种程度上牺牲被替代物的某些特征。所以, 没有最好的近似替代方法, 只有合适的近似替代方法。但是, 某些错误的近似替代方法往往只注重于替代物的数学表达形式, 而不注意替代物的实际应用意义, 不注意替代物实际上牺牲或歪曲了被替代物的太多的重要的特征。如果是这样, 那么, 这种近似替代方法会导致严重失真, 会对应用产生谬误。

下面通过两个实例指出文献 [3] 提出的 d -方法存在着一些严重缺陷, 因此, 它是不合适的区间近似方法。在应用问题中盲目地利用它, 会产生严重的失真和谬误。

例 1 设 A/δ 是一个模糊数, 其隶属函数为

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0.8 & x \in [0, 20) \\ 1 & x \in [20, 21) \\ 0.01 & x \in (21, 621] \\ 0 & \text{the others} \end{cases} \quad (\text{参考图 1}).$$

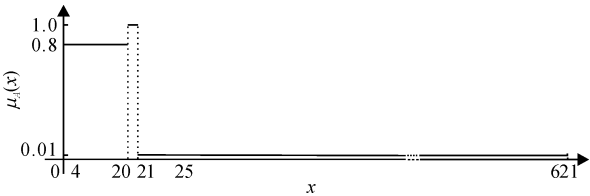


图 1 模糊数 A/δ 的隶属函数

在 d -方法下, 按公式 (2) 计算, A/δ 的替代区间为: $C_d(A/\delta) = [4, 27]$ 。

对任一 $x \in R$, $\mu_A(x)$ 的大或小决定了 x 属于 A/δ 的程度的高或低。所以, 我们认为, 在合适的近似替代方法中, 替代区间应最大可能地保留 R 中那些在 A/δ 中有较高隶属度的元素 (对应用最有意义的部分), 而舍弃掉的应该只是那些隶属度较低的元素 (对应用意义不大的部分)。

但是, 在例 1 中可发现这样一个事实, $\forall x \in [0, 4), \mu_A(x) = 0.8$ 而 $\forall x \in (21, 27], \mu_A(x) = 0.01$ 。这意味着, 有应用中, 对 A/δ 来说, $[0, 4)$ 中的元素是非常重要的元素, 而 $(21, 27]$ 中的元素基本上就不属于 A/δ 。但是, $C_d(A/\delta)$ 舍弃了 $[0, 4)$ 这个区间, 却收纳了 $(21, 27]$ 。

(注意: 在最常用的 α -方法 (注释 1) 下, A/δ 的替代区间为 $C_{0.5}(A/\delta) = [0, 21]$, 它与 $C_d(A/\delta) = [4, 27]$ 有很大的差异。)

结论 1 以上事实说明: 在 d -方法下, 替代区间 $C_d(A/\delta)$ 可能会丢失, 对 A/δ 来说, 非常重要的部分 (对应用最有意义的部分), 却夸大了某些微不足道的部分 (对应用意义不大的部分)。这样的缺陷会给我们的应用问题带来失真。

例 2 设有模糊数 $B/\delta, C/\delta, D/\delta$, 它们的隶属函数分别为

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0.2 & x \in [0, 100) \\ 1 & x \in [100, 101) \\ 0.2 & x \in (101, 301] \\ 0 & \text{the others} \end{cases} \quad (\text{见图 2}),$$

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0.9 & x \in [77\frac{7}{9}, 100) \\ 1 & x \in [100, 110) \\ 0.9 & x \in (110, 144\frac{4}{9}] \\ 0 & \text{the others} \end{cases} \quad (\text{见图 3}),$$

$$\mu_D(x) = \begin{cases} 0.4 & x \in [0, 133\frac{1}{3}) \\ 1 & x \in [133\frac{1}{3}, 139) \\ -0.5x + 70.5 & x \in (139, 141] \\ 0 & \text{the others} \end{cases} \quad (\text{见图 4}).$$

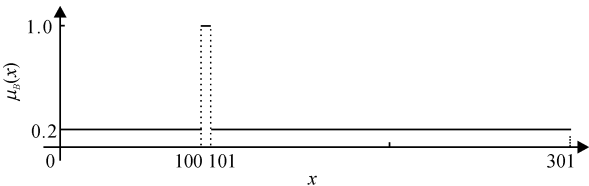


图 2 模糊数 B/δ 的隶属函数

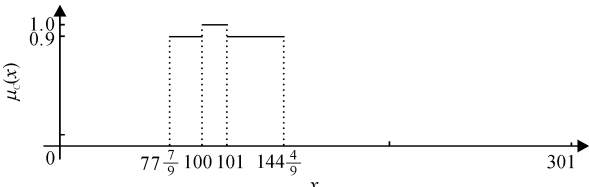


图 3 模糊数 C/δ 的隶属函数

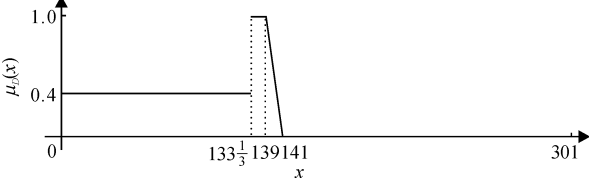


图 4 模糊数 D/δ 的隶属函数

从图 2 图 3 图 4 可以清楚地看到 $B/\delta, C/\delta, D/\delta$ 是 3 个差别很大的模糊数。事实上 $\forall \alpha \in [0, 1], B_\alpha, C_\alpha, D_\alpha$ 都不相同, 而且三者之间存在着很大的差别。

例如:

$$B_1 = \text{core } B = [100 \ 101], C_1 = \text{core } C = [100 \ 110], D_1 = \text{core } D = [133 - \frac{1}{3}, 139];$$

$$B_{0.9} = [100 \ 101], C_{0.9} = [77 - \frac{7}{9}, 144 - \frac{4}{9}], D_{0.9} = [133 - \frac{1}{3}, 139 \ 2];$$

$$B_{0.5} = [100 \ 101], C_{0.5} = [77 - \frac{7}{9}, 144 - \frac{4}{9}], D_{0.5} = [133 - \frac{1}{3}, 140];$$

$$B_{0.2} = [0 \ 301], C_{0.2} = [77 - \frac{7}{9}, 144 - \frac{4}{9}], D_{0.2} = [133 - \frac{1}{3}, 140 \ 6];$$

既然 B, C, D 这三个模糊数存在着显著的差别, 那么, 按常理, B, C, D 的近似区间应该有相应的差别. 然而, 按公式 (2) 计算却有:

$$C_d(B) = C_d(C) = C_d(D) = [80 \ 141].$$

这一结果出乎人们意料. 3 个差别很大的模糊数在 d -方法下竟有相同的替代区间. 以上事实不是偶然的, 可以依据公式 (2) 找到更多的这样的例子.

(注意: 在 α -方法下, B, C, D 的替代区间分别为: $C_{0.5}(B) = [100 \ 101], C_{0.5}(C) = [77 - \frac{7}{9}, 144 - \frac{4}{9}], C_{0.5}(D) = [133 - \frac{1}{3}, 140]$, 它们与 $[80 \ 141]$ 有非常大的差异.)

结论 2 以上事实说明: d -方法是个非常“迟钝”的方法, 用它来近似替代模糊数时, 它不能区分模糊数之间的显著差别, 可能将有显著差别的一些模糊数用同一个区间替代. 因此, d -方法的实用价值值得怀疑.

现在, 考察例 2 中 B 的替代区间 $C_d(B) = [80 \ 141]$. $C_d(B) = S^1 \cup S^2$, 其中 $S^1 = [100 \ 101], S^2 = [80 \ 100] \cup (101, 141]$. 注意到: $\forall x \in S^1, \mu_A(x) = 1$; 而 $\forall x \in S^2, \mu_A(x) = 0.2$ 这意味着, 在应用中, 对

B 来说, S^1 中的元素是非常重要的元素, 而 S^2 中的元素基本上就不属于 B . 但是, S^1 (对应用最有意义的部分) 在 $C_d(B)$ 中只占有 1.6%; 而 S^2 (在应用中一般会被舍弃的部分) 却在 $C_d(B)$ 中占有 98.4%. 也就是说, 近似区间 $C_d(B)$ 的 98.4% 的部分由基本上不属于 B 的元素构成. 所以, 用 $C_d(B) [80 \ 141]$ 来替代 B , 实际上严重地歪曲了 B .

(注意: 在最常用的 α -方法下, B 的替代区间为 $C_{0.5}(B) = [100 \ 101] = S^1$ (对应用最有意义的部分), 它与 $C_d(B) = [80 \ 141]$ 有非常大的差异.)

结论 3 以上事实说明: 在 d -方法下, 模糊数 B 的替代区间 $C_d(B)$ 的绝大部分的成分可能是由很大可能不属于 B 的元素构成. 应用中, 这种情况的发生会导致严重失真. 这种严重失真完全否认了 d -方法的实用的价值.

参考文献:

- [1] K Chakrabarty, R Biswas, S Nanda Nearest ordinary set of a fuzzy set: a rough theoretic construction [J]. Bull Polish Acad Sci 1998(46): 105-114
- [2] J J Buckley Ranking alternatives using fuzzy numbers [J]. Fuzzy Sets and Systems 1985(15): 21-31.
- [3] J J Buckley, S Chanas A fast method of ranking alternatives using fuzzy numbers [J]. Fuzzy Sets and Systems 1998 (30): 337-338
- [4] D Dubois, H Prade Operations on fuzzy numbers [J]. Int j Syst Sci 1978(9): 613-626
- [5] P Grzegorzewski Nearest interval approximation of a fuzzy number [J]. Fuzzy Sets and Systems 2002(130): 321-330
- [6] A Kandel Fuzzy Techniques in Pattern Recognition [M]. New York Wiley, 1982
- [7] A Kaufmann Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets [M]. New York Academic Press, 1975.
- [8] S K Pal, D K Dutta Majumder Fuzzy Mathematical Approach to Pattern Recognition [M]. New Delhi Wiley Eastern Ltd, 1987.
- [9] J Kacprzyk Fuzzy Sets in System Analysis [M]. Polish PWN, Warsaw, 1986

Note on “Nearest Interval Approximation of a Fuzzy Number”

LI Jian-xin¹, HU Gang²

(1 Faculty of Applied Mathematics Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090 China

2 Faculty of Electromechanical Engineering Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090 China)

Abstract A method is discussed about the interval approximation of a fuzzy number published by P. Grzegorzewski in Fuzzy Sets and System. It is demonstrated with examples that there are some serious mistakes in the method.

Key words fuzzy number interval approximation interval set